Σφαίρες και Μπάλες

Νίκος Τερψιάδης
Μαθηματικός στο Πειραματικό Λύκειο του Πανεπιστημίου Μακεδονίας
n.terpsiadis@gmail.com

Γιώργος Μπαλόγλου
πρώην Καθηγητής στο State University of New York OSWEGO
gbaloglou@gmail.com

Περίληψη

Η χρήση μη παραδοσιακών εκπαιδευτικών προσεγγίσεων, όπως οι ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες, η ελεύθερη και καθοδηγούμενη ανακάλυψη και τα ανοικτά προβλήματα, σε μη τυπικές, εκτός του αναλυτικού προγράμματος, μαθηματικές δραστηριότητες, είναι δυνατόν να κινητοποιήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών, εμπλέκοντάς τους στη διαπραγμάτευση 'προχωρημένων' μαθηματικών ιδεών, αποκαλύπτοντας τη μη γραμμική διαδρομή της μαθηματικής ανακάλυψης και αναδεικνύοντας την ιδέα ότι οι μαθηματικές ιδέες δεν είναι αιώνιες και αμετάβλητες αλλά είναι δυνατόν να αναθεωρηθούν ή και να καταρριφθούν. Παρουσιάζονται εδώ μία εκπαιδευτική δράση που διαπραγματεύεται μία προσέγγιση στη σφαιρική γεωμετρία και ένα εργαστήριο που διαπραγματεύεται τις ισομετρίες του κύβου που υλοποιούνται στις μπάλες του Παγκοσμίου Κυπέλλου, που έλαβαν χώρα στο πλαίσιο ενός project με μαθητές της Α΄ Λυκείου του Πειραματικού Λυκείου του Πανεπιστημίου Μακεδονίας τη σχολική χρονιά 2014-15.

Λέξεις κλειδιά: Σφαιρική γεωμετρία, συμμετρία, ισομετρίες του κύβου, μπάλες ποδοσφαίρου, μη τυπικές μαθηματικές δραστηριότητες.

Εισαγωγή

Μία από τις μεγαλύτερες διαμάχες στο χώρο των θετικών επιστημών και ιδιαίτερα των μαθηματικών αφορά στη φύση της μαθηματικής αλήθειας και στην εγκυρότητα των μαθηματικών προτάσεων (Κολέζα, 2006, Τουμάσης, 2002). Τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν σε έναν δικό τους κόσμο ιδεών έξω από τον άνθρωπο και συνεπώς είναι αιώνια και

αμετάβλητα ή είναι επινοήσεις και κατασκευές του ανθρώπινου πολιτισμού, οπότε είναι δυνατόν να αναθεωρηθούν; Οι μαθηματικές ιδέες ανακαλύπτονται ή επινοούνται;

Αποπειραθήκαμε να προσεγγίσουμε αυτή την αντιπαράθεση, υλοποιώντας, τη σχολική χρονιά 2014-15 στην Α΄ Λυκείου του Πειραματικού Λυκείου του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, το project με θέμα «Η αναζήτηση της μαθηματικής αλήθειας». Στο πλαίσιο αυτού του project επιχειρήθηκε μία προσέγγιση στις βασικές αρχές της σφαιρικής γεωμετρίας, με σκοπό την ανάδειξη της ιδέας ότι οι μαθηματικές ιδέες δεν είναι αιώνιες και αμετάβλητες αλλά είναι δυνατόν να αμφισβητηθούν και να καταρριφθούν (Κολέζα, 2006), ακόμη και κάποιες από τις πιο αυτονόητες και προφανείς στην κοινή λογική.

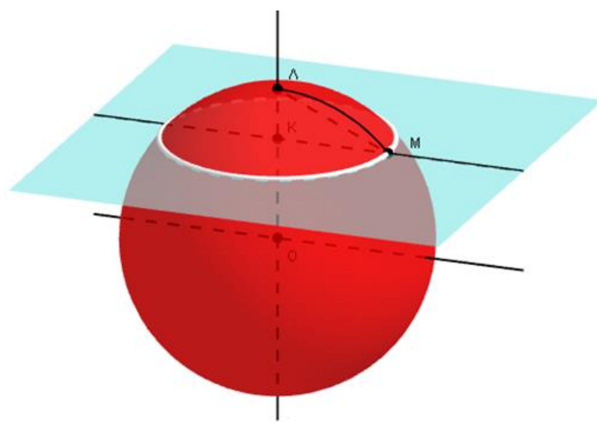
Μία προσέγγιση στη σφαιρική γεωμετρία

Οι μαθητές, στην Α΄ Λυκείου, έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την αξιωματική θεμελίωση ενός συστήματος στο μάθημα της Γεωμετρίας. Σε αυτό το πλαίσιο, τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας εισάγονται ως προφανώς αληθείς και αυταπόδεικτες προτάσεις (Αργυρόπουλος κ.ά., 2013). Η αξίωση της παραδοχής των αξιωμάτων ως βάση της θεμελίωσης μιας γεωμετρικής θεωρίας που διεκδικεί την επιστημονική αλήθεια βασίζεται στην εποπτεία της εμπειρίας και στον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται τον χώρο ο ανθρώπινος νους. Αξιοποιήσαμε αυτό το υπόβαθρο και θέσαμε, υπό μορφή ανοικτού προβλήματος (N.C.T.M., 1980, Branca, 1980, Polya, 1991, Pehkonen, 1997) και στο πλαίσιο μιας διερευνητικής προσέγγισης της μάθησης (Kuhn, et al. 2000, Chu, 2009, Bell, et al. 2010), στις ομάδες των μαθητών τον προβληματισμό αν ισχύουν τα αξιώματα και τα θεωρήματα της Ευκλείδειας επίπεδης γεωμετρίας στην περίπτωση που ο χώρος μας είναι, όχι το επίπεδο, αλλά η επιφάνεια μιας σφαίρας.

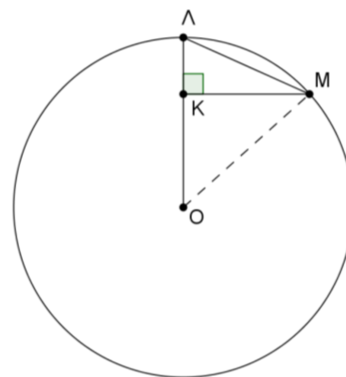
Οι μαθητές, εργαζόμενοι σε ομάδες (Slavin, 1990, Gilles & Ashman, 2005), όρισαν με περιγραφικό τρόπο πως μετασχηματίζονται οι βασικές έννοιες της Ευκλείδειας γεωμετρίας (ευθύγραμμο τμήμα, ευθεία, γωνία και κύκλος) στην επιφάνεια της σφαίρας και στη συνέχεια διερεύνησαν, με τη βοήθεια εποπτικού υλικού, την ισχύ των πέντε αξιωμάτων (αιτημάτων) της Ευκλείδειας γεωμετρίας (Σταμάτης, 1975) στη σφαιρική γεωμετρία. Βασιζόμενοι στην ιδέα ότι η ευθεία υλοποιεί τη συντομότερη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία, διαπίστωσαν εύκολα ότι το αντίστοιχο της ευθείας στη σφαιρική γεωμετρία είναι ο μέγιστος κύκλος και το αντίστοιχο του ευθύγραμμου τμήματος είναι τόξο του μέγιστου κύκλου. Είναι

αξιοσημείωτο ότι, στη συνέχεια της διερεύνησής τους, οι μαθητές κατέληξαν μόνοι τους στο συμπέρασμα ότι το ισοδύναμο του 5ου αξιώματος "από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη στην ευθεία" καταρρίπτεται στη σφαιρική γεωμετρία καθώς και στην ιδέα της ανυπαρξίας παραλλήλων 'ευθειών' στην επιφάνεια της σφαίρας, χωρίς να έχει γίνει προηγουμένως καμία νύξη για τη διερεύνηση ενός τέτοιου ενδεχομένου.

Στη συνέχεια, εξετάστηκε η ισχύς γνωστών στους μαθητές και εμβληματικών προτάσεων της Ευκλείδειας γεωμετρίας, στη σφαιρική γεωμετρία. Τέθηκαν προς διερεύνηση η ισχύς του τύπου για το μήκος κύκλου και η πρόταση για το άθροισμα των γωνιών τριγώνου (Αργυρόπουλος κ.ά., 2013). Τα θέματα αυτά εξετάστηκαν με μία περισσότερο τυπική προσέγγιση. Ζητήθηκε από τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν με τη διατύπωση τυπικών αποδείξεων. Ο τύπος για το μήκος κύκλου διερευνήθηκε με την παράλληλη θεώρηση ενός κύκλου ως κύκλου της σφαιρικής γεωμετρίας και ταυτόχρονα ως κύκλου της επίπεδης γεωμετρίας. Για να το επιτύχουμε αυτό θεωρήσαμε, με τη βοήθεια της Ευκλείδειας στερεομετρίας, τον κύκλο που σχηματίζεται από την τομή ενός επιπέδου με τη σφαίρα (Σχήμα 1). Οι μαθητές εύκολα εντόπισαν την κεντρική ιδέα της παράλληλης αυτής θεώρησης: αν θεωρηθεί επίπεδος κύκλος τότε η ακτίνα του είναι το τμήμα ΚΜ, ενώ αν θεωρηθεί σφαιρικός κύκλος τότε η ακτίνα του είναι το τόξο ΛΜ (Σχήματα 1 και 2).



Σχήμα 1

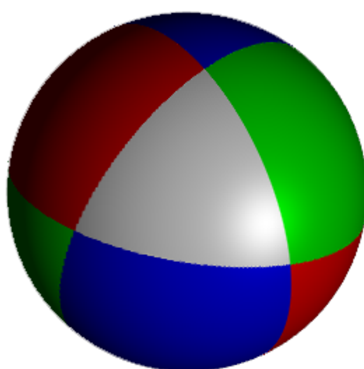


Σχήμα 2

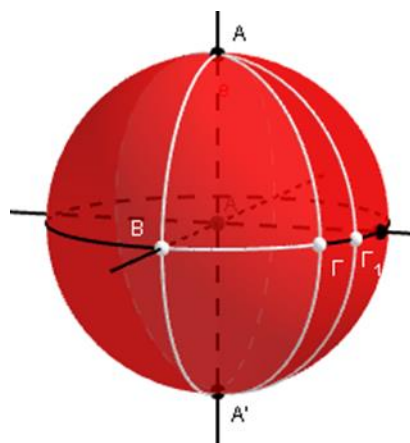
Οι ομάδες παρουσίασαν ελαφρώς διαφορετικές αποδείξεις, όλες όμως κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το μήκος του σφαιρικού κύκλου είναι μικρότερο από το διπλάσιο γινόμενο του π επί την σφαιρική ακτίνα του:

$$ΚΜ < ΛΜ \text{ και } ΛΜ < \text{τόξο}(ΛΜ) \text{ άρα}$$
$$ΚΜ < \text{τόξο}(ΛΜ)$$
$$2π \cdot ΚΜ < 2π \cdot \text{τόξο}(ΛΜ)$$
$$\text{Περίμετρος} < 2π \cdot \text{τόξο}(ΛΜ)$$

Για να γίνει δυνατή η διαπραγμάτευση της πρότασης για το άθροισμα των γωνιών τριγώνου στη σφαιρική γεωμετρία, τέθηκε αρχικά προς διερεύνηση στις ομάδες των μαθητών το κατασκευαστικό ερώτημα "με ποιόν τρόπο σχηματίζεται ένα τρίγωνο στην επιφάνεια της σφαίρας;". Όλες οι ομάδες κατέληξαν με απόλυτη συμφωνία στην κατασκευή του σφαιρικού τριγώνου με τη βοήθεια τριών μέγιστων κύκλων και διαπίστωσαν, μέσω αυτής της κατασκευής, την διαμέριση-πλακόστρωση (tessellation) της επιφάνειας της σφαίρας σε οκτώ ανά δύο ίσα και αντιδιαμετρικώς συμμετρικά σχήματα (Σχήμα 3). Μέσω αυτής της διαδικασίας κατασκευής με τους μέγιστους κύκλους αναπτύχθηκε και η έννοια της ατράκτου (περιοχή της επιφάνειας της σφαίρας που περιέχεται ανάμεσα σε δύο ημικύκλια δύο τεμνόμενων μέγιστων κύκλων (Σχήμα 4)). Στη συνέχεια, με τη διερεύνηση συγκεκριμένων περιπτώσεων τριγώνων οι μαθητές διαπίστωσαν την ύπαρξη τριγώνων με άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των δύο ορθών καθώς και την ύπαρξη τριγώνων με διαφορετικό άθροισμα γωνιών (βλ. τα τρίγωνα ΑΒΓ και $ΑΒΓ_1$ στο Σχήμα 4), γεγονός που ανέδειξε την ιδέα ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου μπορεί να είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών και μάλιστα δεν είναι σταθερό στη σφαιρική γεωμετρία. Έτσι αναδύθηκε εύλογα το ερώτημα πως μπορεί να υπολογιστεί το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου και με τι είναι ίσο.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Στη συνέχεια, στο πλαίσιο μιας προσέγγισης καθοδηγούμενης ανακάλυψης (Mandrin & Preckel, 2009, Τουμάσης, 2002), οι μαθητές εντόπισαν τις διαφορετικές διαμερίσεις της σφαιρικής επιφάνειας σε ατράκτους που περιέχουν το υπό εξέταση σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ και το αντιδιαμετρικά συμμετρικό του Α΄Β΄Γ΄ (Σχήματα 5 και 6) και τον τρόπο με τον οποίο αλληλοεπικαλύπτονται οι άτρακτοι. Με αυτό τον τρόπο αναδύθηκε η ιδέα του υπολογισμού της επιφάνειας του σφαιρικού τριγώνου ως μέρος της επιφάνειας της σφαίρας. Γνωρίζοντας τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας, έγινε φανερό ότι έπρεπε να προηγηθεί ο υπολογισμός της επιφάνειας της ατράκτου ώστε να γίνει, μέσω αυτής, δυνατός ο υπολογισμός του εμβαδού του σφαιρικού τριγώνου. Αρκετά εύκολα οι μαθητές βρήκαν τρόπους για να υπολογίσουν το εμβαδό της ατράκτου χρησιμοποιώντας αναλογική σκέψη και θεωρώντας την άτρακτο μέρος της συνολικής επιφάνειας της σφαίρας. Ξεκινώντας από την παρατήρηση ειδικών περιπτώσεων ατράκτων (το ημισφαίριο είναι το μισό της επιφάνειας της σφαίρας, η άτρακτος που δημιουργείται από τα τόξα δύο κάθετα τεμνόμενων μέγιστων κύκλων είναι το ένα τέταρτο της επιφάνειας της σφαίρας), οι μαθητές προχώρησαν στη διατύπωση ότι “το εμβαδό μιας ατράκτου είναι τόσο μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο μέγιστοι κύκλοι που δημιουργούν την άτρακτο” (βλ. τα τρίγωνα ΑΒΓ και $ΑΒΓ_1$ στο Σχήμα 4). Για να βρούμε, λοιπόν, το εμβαδό μιας ατράκτου, σκεπτόμαστε αναλογικά. Αν χωρίσουμε το ημισφαίριο σε κ ίσες ατράκτους, τότε το εμβαδό κάθε μιας από αυτές θα είναι ίσο με $\frac{2\pi R^2}{\kappa}$. Οπότε, αν πάρουμε λ τέτοιες στοιχειώδεις ατράκτους, τότε το εμβαδό της ατράκτου που σχηματίζεται θα είναι ίσο με λ φορές το εμβαδό της στοιχειώδους ατράκτου, δηλαδή θα είναι:

$$E_{\text{ατράκτου}} = \lambda \cdot \frac{2\pi R^2}{\kappa} = \frac{2\pi\lambda R^2}{\kappa}$$

Όμως, το πηλίκο $\frac{\pi\lambda}{\kappa}$ εκφράζει τη γωνία Α της ατράκτου, οπότε μπορούμε να πούμε ότι το εμβαδό της ατράκτου είναι ίσο με $2R^2A$:

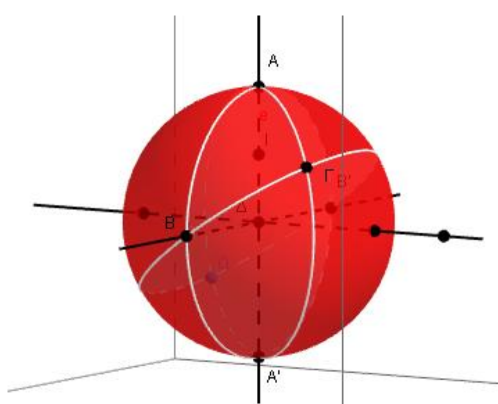
$$E_{\text{ατράκτου}} = 2R^2A$$

όπου Α είναι η γωνία της ατράκτου.

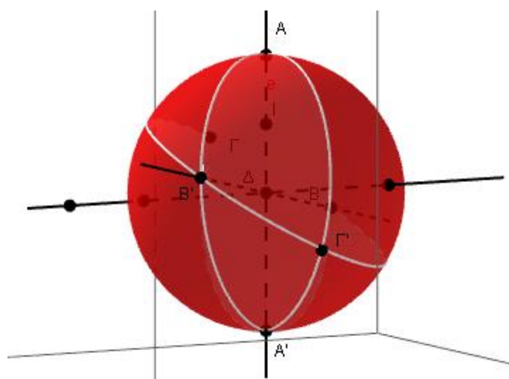
Έτσι, συμπληρώθηκε όλο το αναγκαίο υπόβαθρο και κατέστη δυνατό να προχωρήσουν οι μαθητές στην επανανακάλυψη και διατύπωση μίας

τυπικής απόδειξης του θεωρήματος του Girard[1] (van Brummelen, 2013) για τον υπολογισμό του εμβαδού του σφαιρικού τριγώνου.

Οι μαθητές παρατήρησαν ότι το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ περιέχεται σε τρεις ατράκτους, μία άτρακτο με κορυφή το Α (ας την ονομάσουμε L_A), μία άτρακτο με κορυφή το Β (ας την ονομάσουμε L_B) και μία άτρακτο με κορυφή το Γ (ας την ονομάσουμε $L_Γ$). Αντίστοιχα, το σφαιρικό τρίγωνο-αντίποδας Α΄Β΄Γ΄ περιέχεται στις άλλες τρεις ατράκτους, μία άτρακτο με κορυφή το Α΄ (ας την ονομάσουμε $L_{A'}$), μία άτρακτο με κορυφή το Β΄ (ας την ονομάσουμε $L_{B'}$) και μία άτρακτο με κορυφή το Γ΄ (ας την ονομάσουμε $L_{Γ'}$), που είναι ίσες με τις ατράκτους L_A, L_B και $L_Γ$ αντίστοιχα.



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Κρίσιμη ήταν η παρατήρηση ότι οι έξι άτρακτοι L_A, L_B, $L_Γ$, $L_{A'}$, $L_{B'}$ και $L_{Γ'}$ καλύπτουν όλη την επιφάνεια της σφαίρας, έχοντας όμως καλύψει τις επιφάνειες των δύο σφαιρικών τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ τρεις φορές το καθένα. Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των έξι ατράκτων L_A, L_B, $L_Γ$, $L_{A'}$, $L_{B'}$ και $L_{Γ'}$, ισούται με την επιφάνεια της σφαίρας, συν δύο φορές τα εμβαδά των δύο σφαιρικών τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄. Δηλαδή:

$$L_A + L_B + L_Γ + L_{A'} + L_{B'} + L_{Γ'} = E_{σφαίρας} + 2(ΑΒΓ) + 2(Α'Β'Γ')$$

Όμως, οι άτρακτοι L_A και $L_{A'}$ είναι ίσες, οι άτρακτοι L_B και $L_{B'}$ είναι ίσες και οι άτρακτοι $L_Γ$ και $L_{Γ'}$ είναι ίσες. Επίσης, και τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα. Οπότε η παραπάνω σχέση μπορεί να μετασχηματιστεί:

---

[1] Το θεώρημα αυτό δημοσιεύτηκε από τον Albert Girard το 1626, έχει αποδοθεί όμως και στον Thomas Harriot, 1603.

$$2L_A + 2L_B + 2L_\Gamma = E_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} + 4(AB\Gamma)$$

Αν αντικαταστήσουμε τα εμβαδά των ατράκτων και το εμβαδό της σφαίρας, θα έχουμε:

$$2\cdot 2R^2A + 2\cdot 2R^2B + 2\cdot 2R^2\Gamma = 4\pi R^2 + 4(AB\Gamma)$$
$$4R^2A + 4R^2B + 4R^2\Gamma = 4\pi R^2 + 4(AB\Gamma)$$
$$R^2A + R^2B + R^2\Gamma = \pi R^2 + (AB\Gamma)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να λυθεί ως προς το εμβαδό του ΑΒΓ:

$$(AB\Gamma) = R^2A + R^2B + R^2\Gamma - \pi R^2$$
$$(AB\Gamma) = R^2 (A + B + \Gamma - \pi) \qquad [1]$$

Η παρένθεση εκφράζει την ποσότητα κατά την οποία το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου υπερβαίνει τα π ακτίνια (που είναι το άθροισμα των γωνιών ενός επίπεδου τριγώνου της Ευκλείδειας γεωμετρίας). Οπότε, αυτή η σχέση δείχνει ότι το εμβαδό ενός σφαιρικού τριγώνου εξαρτάται από το άθροισμα των γωνιών του. Όσο μεγαλύτερο είναι το άθροισμα των γωνιών του, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το εμβαδό του.

Αυτό, όμως, που είναι ιδιαίτερα αξιοσημείωτο, είναι ότι η παραπάνω σχέση [1] μπορεί να λυθεί ως προς το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου:

$$R^2A + R^2B + R^2\Gamma = \pi R^2 + (AB\Gamma)$$
$$R^2 (A + B + \Gamma) = \pi R^2 + (AB\Gamma)$$
$$A + B + \Gamma = \pi + \frac{1}{R^2}(AB\Gamma) \qquad [2]$$

Έτσι προέκυψε αναπάντεχα ένας τύπος υπολογισμού του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου και οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να διαπιστώσουν ότι η μαθηματική ανακάλυψη δεν είναι γραμμική και τακτοποιημένη, όπως παρουσιάζεται συνήθως, εκ των υστέρων, στα σχολικά και επιστημονικά βιβλία. Ένας μαθηματικός μπορεί να δοκιμάζει, να πειραματίζεται, να ανασκευάζει τις αρχικές του υποθέσεις και να ακολουθεί δαιδαλώδεις δρόμους μέχρι να τακτοποιήσει τα τελικά του συμπεράσματα (Polya, 2001, Lakatos, 1996).

Η σχέση [2], λοιπόν, απαντά στον προηγούμενο προβληματισμό μας σχετικά με την ισχύ της πρότασης για το άθροισμα των γωνιών τριγώνου

στη σφαιρική γεωμετρία. Αυτή η σχέση δείχνει ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε σφαιρικού τριγώνου υπερβαίνει τα π ακτίνια (δηλαδή τις 180^o). Το πόσο υπερβαίνει τις 180^o εξαρτάται από το εμβαδό του. Έτσι, οι μαθητές κατέληξαν στο 'εντυπωσιακό' συμπέρασμα, ότι στη σφαιρική γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι ίσο με δύο ορθές (180^o), όπως συμβαίνει στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Είναι πάνω από δύο ορθές και μάλιστα δεν είναι σταθερό, αλλά γίνεται μεγαλύτερο καθώς αυξάνει το εμβαδό του.

Αφού διαπιστώθηκε ότι κάποιες μαθηματικές αλήθειες είναι δυνατόν να αμφισβητηθούν, ανέκυψε και διερευνήθηκε ένας προβληματισμός που δεν υπήρχε στον αρχικό σχεδιασμό αλλά τέθηκε από τους ίδιους τους μαθητές: "Τι χρειάζεται μία σφαιρική γεωμετρία εφόσον τα προβλήματα της σφαιρικής γεωμετρίας δύο διαστάσεων είναι δυνατόν να εξεταστούν και να λυθούν στο πλαίσιο μιας Ευκλείδειας γεωμετρίας τριών διαστάσεων;". Προκειμένου να προσεγγίσουμε αυτό τον προβληματισμό περιπλανηθήκαμε λίγο στις μη ευκλείδειες γεωμετρίες και στις σύγχρονες θεωρίες της φυσικής για τη μορφή και τη δομή του χώρου, όπως η θεωρία της Σχετικότητας, προκειμένου να αναδειχθεί η ιδέα ότι το θέμα δεν περιορίζεται στη μελέτη καμπύλων επιφανειών μέσα σε έναν ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο αλλά επεκτείνεται στη μελέτη ενός τετραδιάστατου μη ευκλείδειου καμπυλωμένου χωροχρόνου.

Κυβικές ισομετρίες στις μπάλες του Παγκοσμίου Κυπέλλου

Έχοντας ήδη πραγματοποιήσει μία πρώτη προσέγγιση των σφαιρικών συμμετριών με τη διαδικασία κατασκευής του σφαιρικού τριγώνου και έχοντας αποκτήσει μία πρώτη εμπειρία με τον τρόπο που κατασκευάζονται και συμπεριφέρονται τα σχήματα στη σφαιρική γεωμετρία, προχωρήσαμε στην υλοποίηση ενός εργαστηρίου με σκοπό την περαιτέρω μελέτη των συμμετριών που είναι δυνατόν να υλοποιηθούν στην επιφάνεια της σφαίρας. Οι μαθητές, στο πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος έχουν ήδη διαπραγματευτεί την αξονική και την κεντρική συμμετρία στο επίπεδο και τις συναφείς έννοιες της ανάκλασης και της στροφής (Αργυρόπουλος, κ.ά., 2013, Βανδουλάκης, κ.ά., 2009). Βασιζόμενοι σε αυτή την προηγούμενη γνώση των μαθητών, επιχειρήσαμε να επεκτείνουμε αυτές τις έννοιες, αρχικά στον χώρο των τριών διαστάσεων με τη διερεύνηση των συμμετριών του κύβου και στη συνέχεια στη σφαιρική επιφάνεια δύο διαστάσεων, κάνοντας επιπροσθέτως χρήση της εμπειρίας, με την εποπτεία που προσφέρει ο Ευκλείδειος χώρος των τριών διαστάσεων.

Το εργαστήριο πραγματοποιήθηκε στις 21-4-2015, από τον Γιώργο Μπαλόγλου, πρώην καθηγητή του State University of New York OSWEGO, στο πλαίσιο των εξωτερικών συνεργασιών του σχολείου μας με επιστήμονες και φορείς και είχε διάρκεια δύο διδακτικές ώρες. Στο πρώτο μέρος του εργαστηρίου (https://www.youtube.com/watch?v=bj5hvHk1rvQ) παρουσιάστηκαν και διερευνήθηκαν οι ισομετρίες/συμμετρίες του κύβου/ζαριού −απλοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που διατηρούν αποστάσεις ("ίσα μήκη/μέτρα") και απεικονίζουν το ζάρι στον εαυτό του (Baloglou, 2014):

- Η αντιστροφή (P) στέλνει κάθε σημείο στον αντίποδα του (με κέντρο συμμετρίας το κέντρο του ζαριού), και συνεπώς κάθε μία από τις έξι έδρες στην απέναντι της έδρα: χρησιμοποιώντας την γλώσσα των μεταθέσεων, P = (16)(25)(34).

- Οι τετρακμιακές ανακλάσεις (M_E) είναι ανακλάσεις γύρω από έναν υποθετικό καθρέπτη (επίπεδο ανάκλασης) που διέρχεται από τέσσερις ακμές, διχοτομώντας τέσσερις έδρες και ανακλώντας τες στον εαυτό τους, και εναλλάσσοντας τις υπόλοιπες δύο έδρες: μία από τις τρεις τετρακμιακές ανακλάσεις του ζαριού είναι η (34), που αφήνει στην θέση τους τις έδρες 1, 2, 5, 6 και ανακλά την έδρα 3 στην έδρα 4 και αντίστροφα.

- Οι τετρακόρυφες ανακλάσεις (M_V) είναι ανακλάσεις γύρω από έναν υποθετικό καθρέπτη (επίπεδο ανάκλασης) που διέρχεται από τέσσερις κορυφές, διχοτομώντας δύο έδρες και ανακλώντας τες στον εαυτό τους, και εναλλάσσοντας τις υπόλοιπες τέσσερις έδρες σε δύο ζεύγη: μία από τις έξι τετρακόρυφες ανακλάσεις του ζαριού είναι η (23)(45), που αφήνει στην θέση τους τις έδρες 1, 6 και αλληλοανακλά τις έδρες 2, 3 και 4, 5.

- Οι διεδρικές διπλές στροφές (R_S) είναι στροφές 180 μοιρών γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από τα κέντρα δύο απέναντι εδρών, στέλνοντας τες στον εαυτό τους, και εναλλάσσοντας τις υπόλοιπες τέσσερις έδρες σε δύο ζεύγη: μία από τις τρεις διεδρικές διπλές στροφές του ζαριού είναι η (25)(34), με άξονα που διέρχεται από τα κέντρα των εδρών 1, 6, αλληλοστρέφοντας τις έδρες 2, 5 και 3, 4.

- Οι διακμιακές διπλές στροφές (R_E) είναι στροφές 180 μοιρών γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι ακμών, αλληλοστρέφοντας τις έξι έδρες σε τρία ζεύγη: μία από τις έξι διακμιακές διπλές στροφές του ζαριού είναι η (16)(24)(35), με άξονα που διέρχεται από τα μέσα των ακμών ανάμεσα στις έδρες 2, 4 και 3, 5, αλληλοστρέφοντας τις έδρες 2, 4 και 3, 5, αλλά και τις 1, 6.

- Οι τετραπλές στροφές (R_4) είναι στροφές 90 μοιρών γύρω από τους ίδιους άξονες που χρησιμοποιούνται στις διεδρικές διπλές στροφές (και όπου ο ίδιος άξονας μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά δύο αντίθετες φορές,

που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές τετραπλές στροφές): μία από τις έξι τετραπλές στροφές του ζαριού είναι η (2453), που αφήνει τις έδρες 1, 6 στην θέση τους και στρέφει τις υπόλοιπες τέσσερις έδρες την μία στην άλλη, ενώ αντίστροφη της είναι η (2354).

- Οι τριπλές στροφές (R_3) είναι στροφές 120 μοιρών γύρω από έναν άξονα που ορίζεται από τα άκρα μιας διαγωνίου, στρέφοντας τις έξι έδρες σε μία "πάνω τριάδα" και σε μία "κάτω τριάδα": μία από τις οκτώ τριπλές στροφές του κύβου είναι η (123)(465), που στρέφει τις έδρες 1, 2, 3 την μία στην άλλη και επίσης τις έδρες 4, 6, 5 την μία στην άλλη, ενώ αντίστροφη της είναι η (132)(456).

- Οι τετραπλές στροφανακλάσεις (S_4) είναι συνδυασμοί τετραπλής στροφής και κάθετης προς αυτήν ανάκλασης (άξονας στροφής κάθετος στο επίπεδο ανάκλασης): συνδυάζοντας για παράδειγμα την τετραπλή στροφή (2453) και την ανάκλαση (16) παίρνουμε την τετραπλή στροφανάκλαση (16)(2453).

- Οι εξαπλές στροφανακλάσεις (S_6) είναι συνδυασμοί εξαπλής στροφής (που δεν έχει το ζάρι) γύρω από έναν άξονα τριπλής στροφής και ανάκλασης γύρω από έναν καθρέπτη κάθετο στον άξονα της τριπλής στροφής (που επίσης δεν αντιστοιχεί σε έγκυρη ανάκλαση στο ζάρι): η εξαπλή στροφανάκλαση που αντιστοιχεί στην τριπλή στροφή (123)(465) είναι η (142635), έχουμε δηλαδή μίξη της πάνω τριάδας με την κάτω τριάδα, και μία αλληλοροή και των έξι εδρών.

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν μεγάλα κυβικά ζάρια ως εποπτικό μέσο για να εξετάσουν, ατομικά ο καθένας με την χειραπτική προσέγγιση, τον τρόπο που δημιουργούνται και συμπεριφέρονται οι προαναφερθείσες συμμετρίες. Τα μέλη των ομάδων αλληλοβοηθήθηκαν στην επίλυση αποριών και, όπου ζητήθηκε, δόθηκε βοήθεια από τον καθηγητή της τάξης και τον εισηγητή του εργαστηρίου.



Σχήμα 7

Στο δεύτερο μέρος, μοιράστηκαν στις ομάδες μπάλες ποδοσφαίρου του Παγκοσμίου Κυπέλλου των ετών 2002 (fevernova), 2006 (teamgeist), 2010 (jabulani), και 2014 (brazuca) (βλέπε σχήμα 7) και ζητήθηκε, στο πλαίσιο μιας διερευνητικής προσέγγισης (Kuhn, et al. 2000, Chu, 2009, Bell, et al. 2010), η επίλυση ενός ανοικτού προβλήματος (Pehkonen, 1997, Polya, 1991): να ανακαλύψουν ποιες από τις ισομετρίες/συμμετρίες του κύβου που αναπτύχθηκαν στο πρώτο μέρος, υλοποιούνται στη σφαιρική επιφάνεια κάθε μπάλας (Baloglou, 2014).

Με βάση τα παραπάνω και την επαρκή κατανόηση τους, δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη η ‘διάγνωση’ των ισομετριών της κάθε μπάλας:

- εύκολα διαπιστώνεται ποιες μπάλες έχουν αντιστροφή/αντι-διαμετρικότητα και ποιες δεν έχουν … αν και η brazuca μπορεί να ξεγελάσει με μια φαινομενική αντιστροφή που τελικά δεν υπάρχει.

- εύκολα επίσης διαπιστώνεται ότι ανάκλαση έχουν μόνον η teamgeist και η jabulani, αφήνοντας όμως για το τέλος του εργαστηρίου (η και για εργασία στο σπίτι) το ερώτημα αν η ανάκλαση αυτή είναι τετρακμιακή ή τετρακόρυφη.

- με λίγη περισσότερη προσοχή διαπιστώνεται ότι όλες οι μπάλες έχουν διπλή στροφή, αφήνοντας και πάλι για το τέλος το ερώτημα αν η διπλή στροφή είναι διεδρική ή διακμιακή … αν και στην brazuca έχουμε προφανώς και τα δύο είδη, καθώς έχουμε δύο είδη αξόνων διπλής στροφής.

- τετραπλή στροφή έχει μόνον η brazuca, και μας οδηγούν σ' αυτήν οι 'σταυροί' της.

- τριπλή στροφή έχουν όλες οι μπάλες, καθώς σε όλες υπάρχουν τριάδες σχημάτων/'μονάδων' που συναντώνται με απόλυτη συμμετρία.

- τετραπλή στροφανάκλαση, χωρίς όμως τετραπλή στροφή, μπορεί να διαγνωσθεί, με λίγη τύχη και περισσότερη προσοχή, στην jabulani ... χωρίς να είναι και τόσο προφανές γιατί δεν υπάρχει στις άλλες τρεις μπάλες.

- εξαπλή στροφανάκλαση υπάρχει μόνον στην teamgeist, και μπορούν ίσως να μας οδηγήσουν σ' αυτήν οι έξι 'μονάδες' της.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποφανθούμε ότι η ανάκλαση της teamgeist είναι τετρακμιακή (επειδή τα επίπεδα ανάκλασης της δεν περιέχουν άξονες τριπλής στροφής), ενώ η ανάκλαση της jabulani είναι τετρακόρυφη (επειδή τα επίπεδα ανάκλασης της περιέχουν άξονες τριπλής στροφής). Αυτό θα μπορούσε να γίνει και με έναν λιγότερο γεωμετρικό τρόπο, μετρώντας δηλαδή τα επίπεδα ανάκλασης σε κάθε μπάλα ... και ανακαλώντας ότι το ζάρι έχει τρεις τετρακμιακές και έξι τετρακόρυφες ανακλάσεις. Αναλόγως διαπιστώνουμε ότι οι διπλές στροφές των fevernova, teamgeist, και jabulani είναι όλες διεδρικές, καθώς και στις τρεις μπάλες έχουμε τρεις άξονες διπλής στροφής και όχι έξι. Ειδικά στην jabulani θα μπορούσε να

παρατηρηθεί ότι η διπλή στροφή οφείλει να είναι διεδρική, ως ‘τετράγωνο’ τετραπλής στροφανάκλασης: η επανάληψη τετραπλής στροφής ή τετραπλής στροφανάκλασης είναι διεδρική διπλή στροφή! Για την teamgeist −αλλά και για την jabulani− μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διπλή στροφή είναι διεδρική επειδή ο άξονας της είναι, όπως και στο ζάρι, τομή δύο ιδίου τύπου ανακλάσεων! Τέλος για την fevernova θα μπορούσαμε −όπως βέβαια και για τις άλλες δύο μπάλες− να παρατηρήσουμε ότι η σύνθεση δύο τριπλών στροφών στο ζάρι δεν είναι ποτέ διακμιακή διπλή στροφή, ενώ μπορεί να είναι διεδρική διπλή στροφή!

[Η σύνθεση στροφών αποτελεί και γέφυρα μετάβασης στην μελέτη της ομάδας συμμετρίας του κύβου και στις υποομάδες της (Baloglou 2015), βλέπε και ομιλία στο Τμήμα Μαθηματικών του Α.Π.Θ. στις 20-5-15 (https://www.youtube.com/watch?v=jGidcoY-5Rg). Είναι αξιοσημείωτο ότι οι τέσσερις μπάλες των Παγκοσμίων Κυπέλλων 2002 – 2014 (Σχήμα 7) αντιστοιχούν στις τέσσερις ‘πολυαξονικές’ υποομάδες του κύβου (τάξης 12, 24, 24, 24), ενώ ολόκληρη η ομάδα του κύβου (τάξης 48) υλοποιείται, για παράδειγμα, στην μπάλα του Σχήματος 3. Η fevernova είναι υποομάδα και των τριών άλλων μπαλών, από τις οποίες η teamgeist είναι υποομάδα όχι μόνον της ομάδας του κύβου αλλά και της τάξης 120 ομάδας του εικοσαέδρου (που υλοποιείται στην 'κοινή' πεντεξαγωνική μπάλα ποδοσφαίρου).]

Αφού εξετάστηκαν σε κάθε μπάλα από τις ομάδες, μία προς μία, οι συμμετρίες του κύβου που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, οι μαθητές κατέγραψαν τα αποτελέσματα της εργασίας τους σε φύλλα εργασίας που σχεδιάστηκαν για αυτό τον σκοπό και χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια για την αξιολόγηση του εργαστηρίου.

Αξιολόγηση των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων

Το εργαστήριο και το project γενικότερα αξιολογήθηκαν με ένα ερωτηματολόγιο που απάντησαν ανώνυμα οι δεκαπέντε μαθητές που συμμετείχαν στο project. Το εργαστήριο αξιολογήθηκε επιπλέον από τα φύλλα εργασίας που συμπλήρωσαν οι ομάδες των μαθητών κατά την υλοποίησή του.

Από τα φύλλα εργασίας αξιολογήθηκε η αποτελεσματικότητα του εργαστηρίου ως προς την κατανόηση και την ικανότητα χειρισμού, από τους μαθητές, των συμμετριών στη σφαίρα. Οι 4 ομάδες κλήθηκαν να εντοπίσουν ποιες από τις ισομετρίες του κύβου υλοποιούνται στις μπάλες του Παγκοσμίου Κυπέλλου των ετών 2002, 2006, 2010 και 2014 και να καταγράψουν τις απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας. Οι δύο από τις

τέσσερις ομάδες κατάφεραν εντός του χρονικού ορίου του εργαστηρίου να εξετάσουν και τις τέσσερις μπάλες ενώ οι άλλες δύο ομάδες εξέτασαν δύο από αυτές. Κάθε μπάλα εξετάστηκε από τρεις ομάδες. Τα αποτελέσματα φαίνονται στους πίνακες 1, 2, 3 και 4 (στη στήλη "σωστή απάντηση", το ο σημαίνει "όχι" και το ν σημαίνει "ναι", ενώ στις στήλες των απαντήσεων των μαθητών, το 1 σημαίνει ότι η ομάδα απάντησε σωστά ενώ το 0 ότι απάντησε λάθος).

Και οι τρεις ομάδες εντόπισαν όλες τις συμμετρίες που έχει η fevernova καθώς και αυτές που δεν έχει (Πίνακας 1).

2002 Fevernova	σωστή απάντηση	απαντήσεις μαθητών			
		1η ομάδα	2η ομάδα	3η ομάδα	4η ομάδα
αντιστροφή	ο	1	1	1	
ανάκλαση	ο	1	1	1	
διπλή στροφή	ν	1	1	1	
τετραπλή στροφή	ο	1	1	1	
τριπλή στροφή	ν	1	1	1	
τετραπλή στροφανάκλαση	ο	1	1	1	
εξαπλή στροφανάκλαση	ο	1	1	1	
σύνολο		**7**	**7**	**7**	

Πίνακας 1

Από τις τρεις ομάδες που εξέτασαν την teamgeist και οι τρεις εντόπισαν σωστά ότι έχει τις συμμετρίες της αντιστροφής, της ανάκλασης και της διπλής στροφής, οι δύο από τις τρεις εντόπισαν σωστά ότι έχει τριπλή στροφή και εξαπλή στροφανάκλαση και ότι δεν έχει τετραπλή στροφή, ενώ μόνον μία ομάδα εντόπισε σωστά ότι δεν έχει τετραπλή στροφανάκλαση (Πίνακας 2).

2006 Teamgeist	σωστή απάντηση	απαντήσεις μαθητών			
		1η ομάδα	2η ομάδα	3η ομάδα	4η ομάδα
αντιστροφή	ν	1	1		1
ανάκλαση	ν	1	1		1
διπλή στροφή	ν	1	1		1
τετραπλή στροφή	ο	0	1		1
τριπλή στροφή	ν	0	1		1
τετραπλή στροφανάκλαση	ο	0	0		1
εξαπλή στροφανάκλαση	ν	1	1		0
σύνολο		**4**	**6**		**6**

Πίνακας 2

Από τις τρεις ομάδες που εξέτασαν την jabulani και οι τρεις εντόπισαν σωστά ότι δεν έχει αντιστροφή, ότι έχει ανάκλαση, διπλή και τριπλή

στροφή και τετραπλή στροφανάκλαση, οι δύο από τις τρεις εντόπισαν σωστά ότι δεν έχει τετραπλή στροφή, ενώ μόνον μία ομάδα εντόπισε σωστά ότι δεν έχει εξαπλή στροφανάκλαση (Πίνακας 3).

2010 Jabulani	σωστή απάντηση	απαντήσεις μαθητών			
		1η ομάδα	2η ομάδα	3η ομάδα	4η ομάδα
αντιστροφή	ο	1	1		1
ανάκλαση	ν	1	1		1
διπλή στροφή	ν	1	1		1
τετραπλή στροφή	ο	0	1		1
τριπλή στροφή	ν	1	1		1
τετραπλή στροφανάκλαση	ν	1	1		1
εξαπλή στροφανάκλαση	ο	0	1		0
σύνολο		**5**	**7**		**6**

Πίνακας 3

Από τις τρεις ομάδες που εξέτασαν την brazuca και οι τρεις εντόπισαν σωστά ότι έχει διπλή, τριπλή και τετραπλή στροφή, οι δύο από τις τρεις εντόπισαν σωστά ότι δεν έχει ανάκλαση, τετραπλή και εξαπλή στροφανάκλαση, ενώ μόνον μία ομάδα εντόπισε σωστά ότι δεν έχει αντιστροφή (Πίνακας 4).

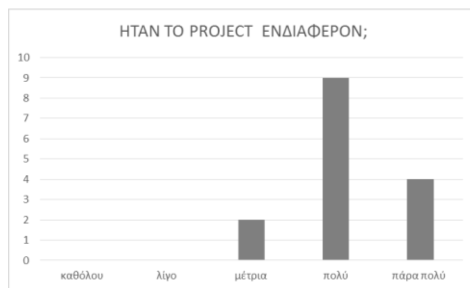
2014 Brazuca	σωστή απάντηση	απαντήσεις μαθητών			
		1η ομάδα	2η ομάδα	3η ομάδα	4η ομάδα
αντιστροφή	ο	0	0	1	
ανάκλαση	ο	0	1	1	
διπλή στροφή	ν	1	1	1	
τετραπλή στροφή	ν	1	1	1	
τριπλή στροφή	ν	1	1	1	
τετραπλή στροφανάκλαση	ο	0	1	1	
εξαπλή στροφανάκλαση	ο	0	1	1	
σύνολο		**3**	**6**	**7**	

Πίνακας 4

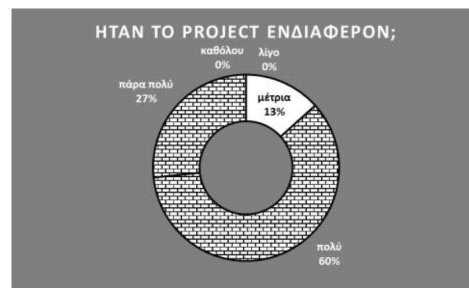
Όπως προκύπτει από την αξιολόγηση των φύλλων εργασίας, οι μαθητές ανταποκρίθηκαν με αρκετή επιτυχία στον εντοπισμό των συμμετριών που υλοποιούνται στις τέσσερις μπάλες ποδοσφαίρου. Γενικά, η fevernova αποδείχθηκε η πιο εύκολη, ενώ η brazuca η πιο δύσκολη στον εντοπισμό των ισομετριών του κύβου που υλοποιούνται σε αυτές. Αναμενόμενα, η στροφανάκλαση δυσκόλεψε τους μαθητές περισσότερο από την στροφή και την ανάκλαση, ενώ δεν υπήρξε αρκετός χρόνος για διάκριση μεταξύ τετρακμιακής και τετρακόρυφης ανάκλασης ή μεταξύ διεδρικής και διακμιακής διπλής στροφής.

Από τα ερωτηματολόγια αξιολογήθηκαν οι στάσεις και το επίπεδο ικανοποίησης των μαθητών από το εργαστήριο και το project γενικότερα. Το ερωτηματολόγιο αποτελούνταν από 8 ερωτήσεις με κλειστές απαντήσεις σε πενταβάθμια κλίμακα Likert (Μιχαλοπούλου, 1992). Οι απαντήσεις "καθόλου" και "λίγο" αξιολογούνται ως αρνητική στάση των μαθητών στην κάθε ερώτηση, η απάντηση "μέτρια" αξιολογείται ως ουδέτερη στάση και οι απαντήσεις "πολύ" και "πάρα πολύ" αξιολογούνται ως θετική στάση. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με ραβδογράμματα, στα οποία το ύψος κάθε ράβδου δείχνει τον αριθμό των μαθητών που επέλεξαν την κάθε απάντηση, και με κυκλικά διαγράμματα, που δείχνουν τα αντίστοιχα ποσοστά των μαθητών (στρογγυλοποιημένα στη μονάδα).

Στην 1η ερώτηση, όπου εξετάζεται αν το project ήταν ενδιαφέρον, η στάση των μαθητών αξιολογείται ως θετική, αφού το 87% των μαθητών (13 από τους 15 μαθητές) απάντησαν "πολύ" και "πάρα πολύ" (Γραφήματα 1 και 2).

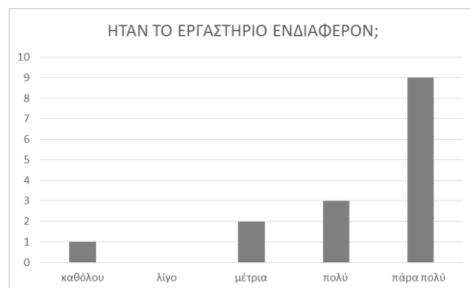


Γράφημα 1

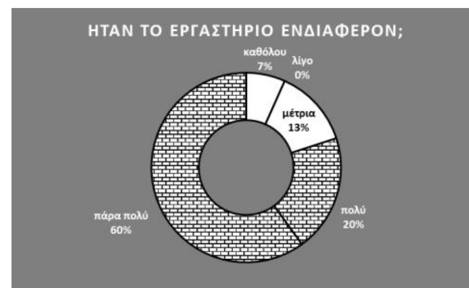


Γράφημα 2

Στη 2η ερώτηση, όπου εξετάζεται, πιο συγκεκριμένα, αν το εργαστήριο ήταν ενδιαφέρον, η στάση των μαθητών αξιολογείται επίσης ως θετική, αφού το 80% των μαθητών (12 από τους 15 μαθητές) απάντησαν "πολύ" και "πάρα πολύ" (Γραφήματα 3 και 4). Παρά την ύπαρξη ενός μαθητή που δεν βρήκε καθόλου ενδιαφέρον το εργαστήριο, είναι αξιοσημείωτο ότι, μεταξύ των μαθητών που εκφράζουν θετική στάση, είναι πολύ μεγάλο το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν "πάρα πολύ".

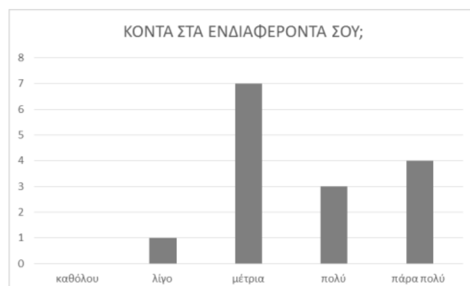


Γράφημα 3

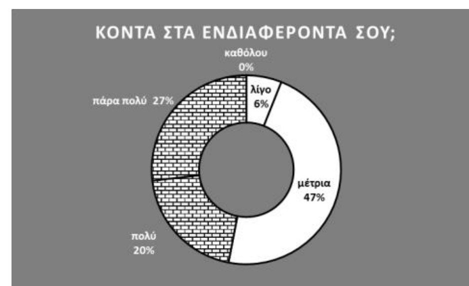


Γράφημα 4

Η 3η ερώτηση διερευνά αν το θέμα του project ήταν κοντά στα ενδιαφέροντα των μαθητών. Παρά το ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν θετική στάση δεν είναι μικρό (47%), εντούτοις είναι εξίσου μεγάλο το ποσοστό των μαθητών που δηλώνουν ουδέτερη στάση (47%), ενώ ένας μαθητής δηλώνει αρνητική στάση (Γραφήματα 5 και 6). Οι απαντήσεις των μαθητών σε αυτή την ερώτηση, σε συνδυασμό με τις απαντήσεις στις δύο προηγούμενες ερωτήσεις, δείχνουν μία θετική επίδραση του project και του εργαστηρίου στους μαθητές, αφού ακόμη και μαθητές που έκριναν ότι δεν ήταν κοντά στα ενδιαφέροντά τους, δήλωσαν ότι τους φάνηκαν τελικά “πολύ” ή “πάρα πολύ” ενδιαφέροντα.

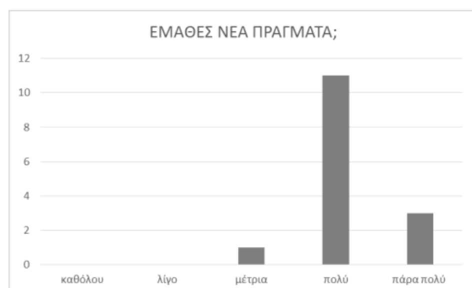


Γράφημα 5

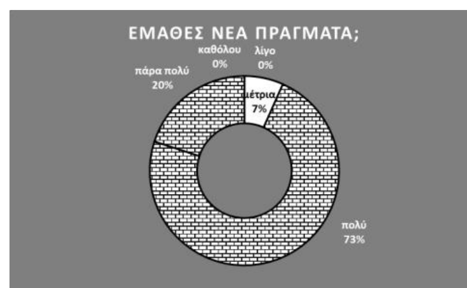


Γράφημα 6

Σχεδόν όλοι οι μαθητές (93%, οι 14 από τους 15 μαθητές) θεωρούν ότι έμαθαν κάποια νέα πράγματα από τη συμμετοχή τους στο εργαστήριο και στο project γενικότερα (Γραφήματα 7 και 8).

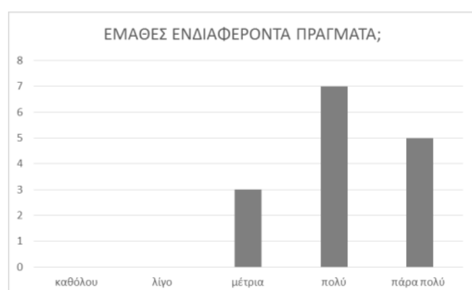


Γράφημα 7

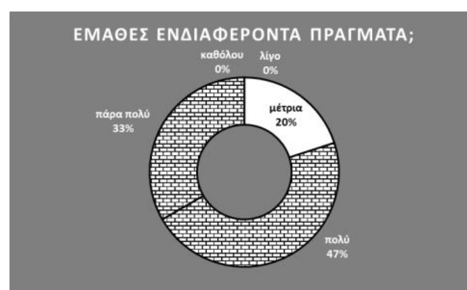


Γράφημα 8

Μεγάλο ποσοστό των μαθητών (80%, οι 12 από τους 15 μαθητές) θεωρούν ότι έμαθαν κάποια ενδιαφέροντα πράγματα από τη συμμετοχή τους στο εργαστήριο και στο project (Γραφήματα 9 και 10). Αυτή η ένδειξη κρίνεται ως σημαντική δεδομένου ότι, όπως φάνηκε από την 3η ερώτηση, το ποσοστό των μαθητών που έκριναν ότι το θέμα ήταν εντός των ενδιαφερόντων τους ήταν πολύ χαμηλότερο (47%).

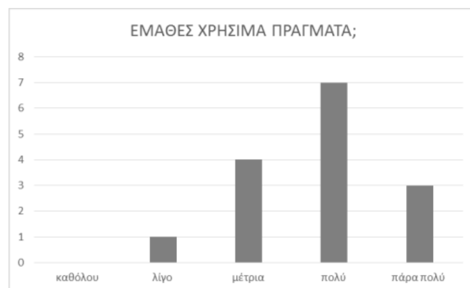


Γράφημα 9



Γράφημα 10

Στην 6η ερώτηση (Γραφήματα 11 και 12), το ποσοστό των μαθητών που εκτιμούν ότι έμαθαν κάποια χρήσιμα πράγματα κατά την υλοποίηση του εργαστηρίου και του project είναι αρκετά χαμηλότερο (66%, οι 10 από τους 15 μαθητές). Παρόλα αυτά, δεν πρέπει να θεωρηθεί ένα χαμηλό ποσοστό, δεδομένου ότι τα θέματα που διαπραγματευτήκαμε είναι εκτός της σχολικής ύλης και του αναλυτικού προγράμματος του Λυκείου και συνεπώς δεν είναι χρηστικά για το μάθημα των Μαθηματικών. Αν συνεκτιμηθεί και η προηγούμενη ερώτηση, τότε φαίνεται ότι αρκετοί μαθητές που δεν θεωρούν χρήσιμα τα θέματα που διαπραγματευτήκαμε στο εργαστήριο και στο project, τα θεωρούν εντούτοις ενδιαφέροντα.



Γράφημα 11

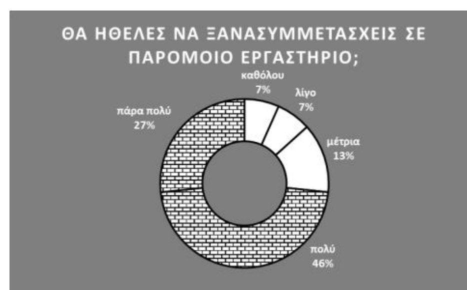


Γράφημα 12

Στην 7η ερώτηση, πολύ μεγάλο ποσοστό των μαθητών (73%, οι 11 από τους 15 μαθητές), απάντησαν ότι θα ήθελαν να ξανασυμμετάσχουν σε ένα παρόμοιο εργαστήριο (Γραφήματα 13 και 14).

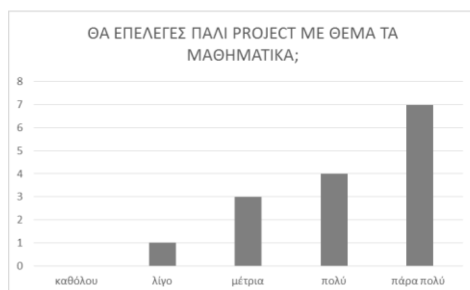


Γράφημα 13



Γράφημα 14

Τέλος, μεγάλο ποσοστό των μαθητών (73%, οι 11 από τους 15 μαθητές), δηλώνουν πρόθεση να ξαναεπιλέξουν project με θέμα από το πεδίο των Μαθηματικών και μάλιστα οι περισσότεροι από αυτούς το δηλώνουν με έμφαση διαλέγοντας την επιλογή “πάρα πολύ” (Γραφήματα 13 και 14).



Γράφημα 15



Γράφημα 16

Συμπεράσματα

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ομαδοσυνεργατική μέθοδος (Slavin, 1990, Gilles & Ashman, 2005) λειτούργησε αποτελεσματικά και απέδωσε σημαντικά αποτελέσματα τόσο στη διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων σχετικά με τη σφαιρική γεωμετρία όσο και στο εργαστήριο με τις μπάλες ποδοσφαίρου. Στο πλαίσιο κάθε ομάδας πραγματοποιήθηκε ανταλλαγή και συσσώρευση ιδεών, που οδήγησε τις ομάδες στην επιτυχή αντιμετώπιση των προς διερεύνηση ερωτημάτων που τέθηκαν σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις με τη μορφή ανοικτού προβλήματος (N.C.T.M., 1980, Branca, 1980, Polya, 1991, Pehkonen, 1997). Ο συναγωνισμός που αναπτύχθηκε στις περιπτώσεις που οι ομάδες διερευνούσαν το ίδιο ερευνητικό ερώτημα συνέβαλε στην κινητοποίηση των μαθητών, στην προώθηση της ενεργητικής συμμετοχής τους και στη δημιουργία θετικού κλίματος στην τάξη (Chiu, 2000). Επίσης, με τη συνδυαστική προσέγγιση της ελεύθερης και της καθοδηγούμενης ανακάλυψης-επανανακάλυψης της γνώσης ενισχύθηκε η αυτενέργεια των μαθητών και επιτεύχθηκε η ενεργητική κατασκευή της γνώσης (Pulaski, 1980, Ernest, 1996, Steinbring, 2005). Αυτή η προσέγγιση σε συνδυασμό με την αξιοποίηση γεγονότων από την ιστορική εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης (van Brummelen, 2013), έδωσε την ευκαιρία στους μαθητές να διαπιστώσουν τη μη γραμμική διαδρομή της μαθηματικής ανακάλυψης που χαρακτηρίζεται από πειραματισμούς, δοκιμές και ανασκευές των αρχικών υποθέσεων (Polya, 2001, Lakatos, 1996).

Γενικότερα, η εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες εκτός αναλυτικού προγράμματος και εκτός σχολικής ύλης, είχε θετικά αποτελέσματα τόσο ως προς την διαπραγμάτευση των 'προχωρημένων' μαθηματικών ιδεών με τις οποίες ενεπλάκησαν οι μαθητές, όσο και ως προς το επίπεδο ικανοποίησής τους και την καλλιέργεια θετικών στάσεων απέναντι στο γνωστικό πεδίο των μαθηματικών. Η μη-τυπική προσέγγιση που επιχειρήθηκε κατά την υλοποίηση του project και του εργαστηρίου και η σύνδεση με 'εξω-μαθηματικά' θέματα, συνέβαλαν σημαντικά στην κινητοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών, στην ενεργή εμπλοκή τους στις δραστηριότητες και στην ενεργητική κατασκευή της γνώσης από τους μαθητές. Τέλος, μέσω της έρευνας που πραγματοποίησαν οι μαθητές οδηγήθηκαν στην ανάδειξη της ιδέας ότι οι μαθηματικές ιδέες δεν είναι αιώνιες και αμετάβλητες αλλά είναι δυνατόν να αναθεωρηθούν ή και να καταρριφθούν ακόμη και οι πιο προφανείς και αυτονόητες από αυτές.

Η εργασία που πραγματοποίησαν οι μαθητές της Α΄ τάξης του Πειραματικού Λυκείου του Πανεπιστημίου Μακεδονίας που συμμετείχαν

στο project, παρουσιάστηκε από ομάδα των μαθητών στην 7η Διεθνή Μαθηματική Εβδομάδα την Παρασκευή 20 Μαρτίου 2015 και είναι αναρτημένη στη διεύθυνση http://users.sch.gr/anitus/ στην ενότητα "Καινοτόμες Δράσεις".

Βιβλιογραφία

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτος, Σ. & Σίδερης, Π., (2013). *Ευκλείδεια Γεωμετρία*. Αθήνα, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος».

Baloglou, G. (2014). *The 48 isometries of the left-handed die and the regular tetrahedron as a subgroup of the cube*. Διαθέσιμο στο http://www.oswego.edu/~baloglou/103/die.html (ημερομηνία προσπέλασης 3-2-2016)

Baloglou, G. (2014). *World Cup symmetries*. Διαθέσιμο στο https://crystallomath.wordpress.com/2014/02/14/world-cup-symmetries/ (ημερομηνία προσπέλασης 3-2-2016)

Baloglou, G. (2015). *Cube on the ball*. Διαθέσιμο στο https://crystallomath.wordpress.com/2015/06/13/cube-on-the-ball/ (ημερομηνία προσπέλασης 3-2-2016)

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. & Φερεντίνος, Σ. (2009). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Αθήνα, ΟΕΔΒ.

Bell, T., Urhahne, D., Schanze, S., & Ploetzner, R. (2010). Collaborative inquiry learning: Models, tools, and challenges. *International Journal of Science Education* 3(1), 349-377.

Branca, N. (1980). Problem solving as a goal, Process and Basic Skill. In Krulik, S. & Reys, R. (eds): *Problem solving in school mathematics*. Reston, VA, N.C.T.M.

van Brummelen, G. (2013). *Heavenly mathematics: The forgotten art of spherical trigonometry*. New Jersey, Princeton University Press.

Chiu, M. M. (2000). Group problem solving processes: Social interactions and individual actions. *Journal for the Theory of Social Behavior*, 30 (1), 27-50.

Chu, K.W.S. (2009). Inquiry project-based learning with a partnership of three types of teachers and the school librarian. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 60 (8), 1671–86.

Ernest, P. (1996). *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematical education*. London, The Falmer Press.

Gilles, R.M., & Ashman, A. F. (2005). *Cooperative Learning: The social and intellectual Outcomes of Learning in Groups*. London, Routledge Falmer.

Κολέζα, Ε. (2006*). Μαθηματικά και σχολικά μαθηματικά: Επιστημολογική και κοινωνιολογική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης*. Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα.

Kuhn, D., Black, J., Keselman, A. & Kaplan, D. (2000). The development of cognitive skills to support inquiry learning. *Cognition and Instruction* 18 (4), 495–523.

Lakatos, I. (1996). *Αποδείξεις και ανασκευές. Η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης*. Αθήνα, Τροχαλία.

Mandrin, P. & Preckel, D. (2009). Effect of Similarity-Based Guided Discovery Learning on Conceptual Performance. *School Science And Mathematics*, 109 (3), 133-145.

Μιχαλοπούλου, Κ. (1992). *Κλίμακες μετρήσεως στάσεων*. Αθήνα, Εκδόσεις Οδυσσέας.

National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.) (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, WA, N.C.T.M.

Pehkonen, E. (ed.) (1997). *Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom*. Helsinki, University of Helsinki.

Polya, G. (1991). *Πώς να το λύσω*. Αθήνα, Εκδόσεις Καρδαμίτσα.

Polya, G. (2001). *Η μαθηματική ανακάλυψη*. Αθήνα, Εκδόσεις Κάτοπτρο.

Pulaski, M. (1980). *Understanding Piaget*. New York: Harper & Row.

Slavin, R. E. (1990). *Cooperative Learning*. New Jersey, Prentice-Hall.

Σταμάτης, Ε. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία Βιβλία 1, 2, 3, 4* (Τόμος Ι). Αθήνα, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. New York, Springer.

Τουμάσης, Μ. (2002). *Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα, Gutenberg.